# MIT AUFGABEN DIFFERENZIEREN

<table>
<tr><td colspan="2">Methode: eine Aufgabe mit verschieden Arbeitsaufträgen und Einsatz von Hilfekarten</td><td>Fach: Mathematik</td></tr>
<tr><td colspan="2">Thema des Unterrichtsbeispiels: Geometrische Konstruktionen</td><td>Klassenstufe: 7 bis 10</td></tr>
<tr><td colspan="3">Kompetenzbereich: Problemlösen (K2)</td></tr>
<tr><td>Ziele</td><td colspan="2">• Lösungsstrategien entwickeln<br>• Flexibilität bei geometrischen Konstruktionen erlangen<br>• Vielfalt von Lösungswegen nachvollziehen und bewerten<br>• Neue Lösungsstrategien bewusstmachen und ggf. übernehmen</td></tr>
<tr><td>Materialien</td><td colspan="2">Arbeitsheft, Zirkel, Lineal, Geodreieck; evtl. DGS; evtl. Schulbuch</td></tr>
<tr><td>(Raum-)ausstattung</td><td colspan="2">Evtl. Computer</td></tr>
<tr><td>Zeitaufwand</td><td colspan="2">15 bis 45 Minuten (je nach Aufgabenstellung und Lösungsdiskussion)</td></tr>
<tr><td>Voraussetzungen (für die Methode)</td><td colspan="2">--</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Ablauf des Unterrichtsbeispiels</td></tr>
<tr><td>Inhalt/Materialien</td><td colspan="2">Kommentar</td></tr>
<tr><td>Aufgabenstellung</td><td colspan="2">Die erlaubten Hilfsmittel werden festgelegt und eventuelle Hilfekarten ausgelegt.<br><br>Wenn die Aufgabe unabhängig vom gerade behandelten Thema eingesetzt wird (also NICHT in einer inhaltlich passenden Geometrie-einheit), ist mit größerer Flexibilität bei dem Lösungsweg zu rechnen</td></tr>
<tr><td>Bearbeitung</td><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler sollten alleine arbeiten. Wenn möglichst viele Lösungswege verlangt sind, sollten sie in Zweierteams arbeiten.<br><br>In sehr lernschwachen Gruppen können Zweierteams ebenfalls sinnvoll sein, um gemeinsam einen Zugang zur Aufgabe zu finden.</td></tr>
<tr><td>Präsentation</td><td colspan="2">Zunächst stellt ein Schüler seine Lösung vor, danach alle diejenigen, die anders vorgegangen sind. Abschließend können die Schülerinnen und Schüler sich mit ihrer Lösung den vorgestellten Lösungsmöglich-keiten zuordnen.</td></tr>
<tr><td>Bewertung/Reflexion</td><td colspan="2">Was ist die „schönste“ oder die „beste“ Lösung? Die Schülerinnen und Schüler können gemeinsam Kriterien dafür erarbeiten bzw. ihren Vorschlag begründen.<br><br>Wie kommt man auf eine solche Lösung? Die Schülerinnen und Schüler beschreiben, was ihnen dabei geholfen hat. Dadurch können Lösungsstrategien sichtbar gemacht werden.</td></tr>
</table>

**Aufgabenstellung**

Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P außerhalb von g.
Gesucht ist ein Punkt H so, dass H auf g liegt und man von H aus den Punkt P unter einem Winkel von 30° anpeilt.

*Schwierigere Aufgabenstellung:*

Finde und beschreibe mindestens zwei verschiedene Lösungswege.

*Für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler:*

Finde und beschreibe möglichst viele verschiedene Lösungswege.

**Erlaubte Hilfsmittel**

*Leicht:* Geodreieck, Zirkel, Lineal, *evtl. auch DGS (z.B. geogebra)*

*Schwer:* Zirkel und Lineal

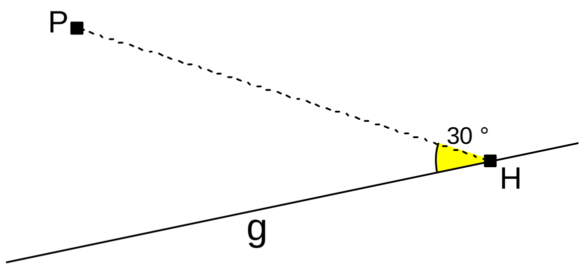
**Mögliche Hilfekarten**

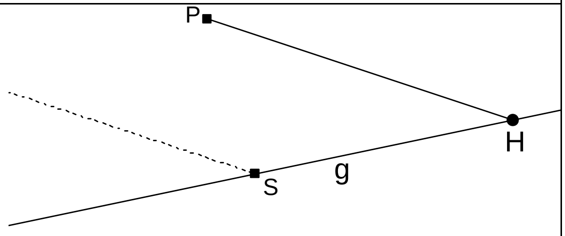
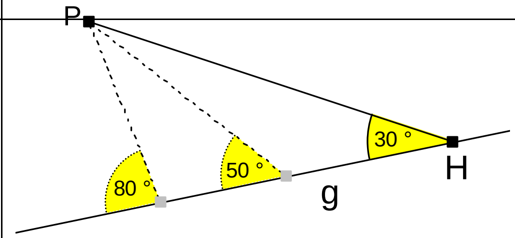
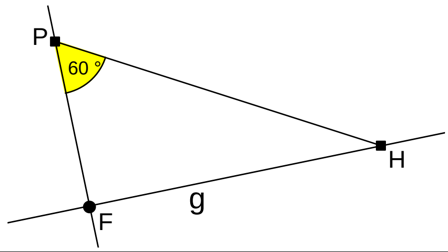
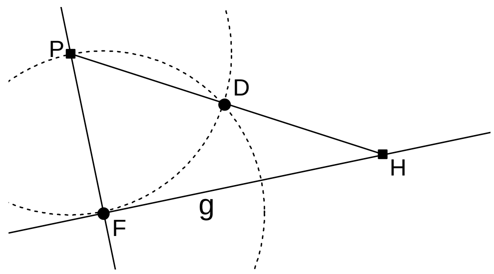
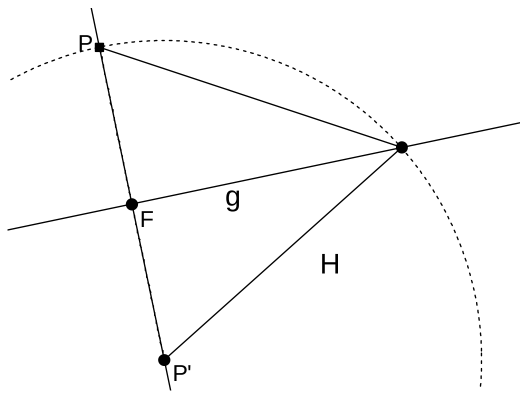
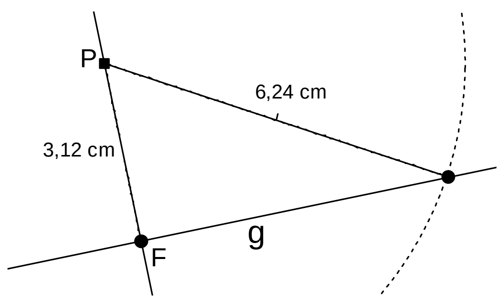
Hilfekarte 1:

Fertige eine Skizze an, die die Situation in der Aufgabe beschreibt.

Hilfekarte 2:

Skizze zur Aufgabe

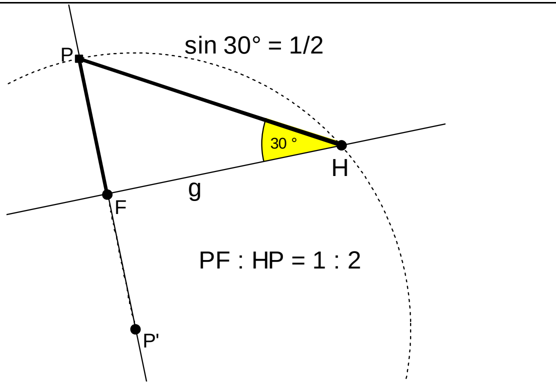


| **Lösungsmöglichkeiten** | |
|---|---|
| **1. Parallelverschiebung**<br><br>Zeichne einen beliebigen Punkt S auf g und zeichne dort eine Strecke im Winkel von 30°. Verschiebe diese entlang der Geraden so lange, bis die Parallele durch P geht. |   |
| **2. Dynamisch mit DGS**<br><br>Lege einen Punkt beliebig auf g und messe den Winkel, den die Verbindungsstrecke zu P mit g bildet. Verschiebe den Punkt so lange, bis 30° angezeigt werden. |   |
| **3. Konstruktion von P aus**<br><br>Zeichne das Lot von P auf g, nenne den Lotfußpunkt F. Wegen des Winkelsummensatzes ist im Dreieck PFH der Winkel bei P 60° groß. Trage dort 60° an. |   |
| **4. Konstruktion von P mit Zirkel und Lineal**<br><br>Zeichne den Lotfußpunkt F wie oben. Um einen 60°-Winkel bei P zu konstruieren, wird über PF mit zwei Kreisbögen ein gleichseitiges Dreieck konstruiert (Spitze D). H ist Schnittpunkt der Verlängerung von PD mit g. |   |
| **5. Konstruktion mit Spiegelachse**<br><br>P' ist der Spiegelpunkt, wenn P an g gespiegelt wird.<br><br>PP'H ist dann ein gleichseitiges Dreieck (wegen des 30°-Winkels bei H).<br><br>H erhält man als Schnitt des Kreises um P' mit Radius PP' mit der Geraden g. |   |
| **6. Konstruktion mit Hilfe von sin 30°**<br><br>sin 30° = ½<br><br>d. h. die Länge l des Lotes PF ist halb so lang wie die Hypotenuse PH<br><br>H ist Schnittpunkt des Kreises um P mit Radius 2l |   |

### 7. Konstruktion mit sin 30° (Zirkel und Lineal)

Um eine doppelt so lange Strecke wie PF zu konstruieren, wird P an g gespiegelt. Die Länge PP‘ wird dann durch einen Kreisbogen übertragen.

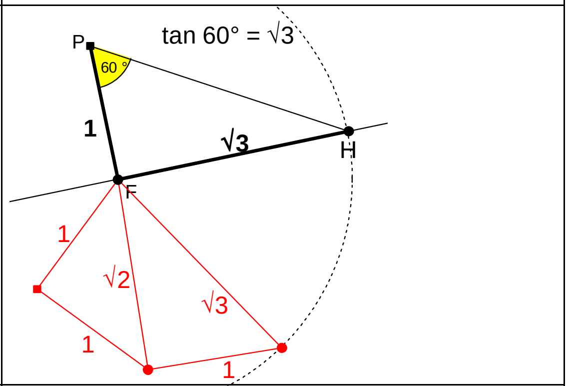
Von der Konstruktion her ist es das gleiche wie Lösung 5, die mathematische Begründung ist aber eine andere.



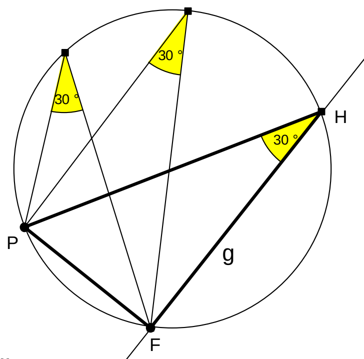

### 8. Konstruktion mit Hilfe von tan 60°

tan 60°= √3, d.h. PF : FH = 1 : √3

Um eine √3-mal so lange Strecke wie PF zu konstruieren, kann man von F aus eine „Pythagoras-Schnecke“ konstruieren. Nach zwei Schritten erhält man eine Strecke der Länge √3, die man per Kreisbogen auf g überträgt.




### 9. Konstruktion mit Umfangswinkelsatz (spez.)

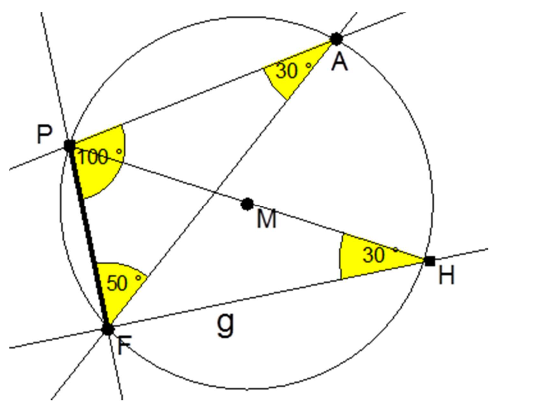



Umfangswinkelsatz: Bei Dreiecken über einer gemeinsamen Kreissehne sind die markierten Winkel gleich groß.

Über PF wird ein Dreieck PFA konstruiert mit einem Winkel von 30° bei A. Das erreicht man z. B., indem man bei P und F zwei Winkel mit insgesamt 150° abträgt.

Anschließend wird über den Schnitt von 2 Mittelsenkrechten der Mittelpunkt des Kreises durch A, P und F konstruiert.

H ist der Schnittpunkt des Kreises mit g.




### Konstruktion mit Umfangswinkelsatz (allg.)

Die Konstruktion ist auch ohne den Lotfußpunkt F möglich.

Von einem beliebigen Punkt A aus werden bei PA 30° angetragen. X ist der Schnittpunkt dieser Linie mit g.

Anschließend wird der Mittelpunkt M des Kreises durch A, P und X konstruiert. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit g ist H.